

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1948-014

Over de irrationaliteit van π

Prof.dr. J. Popken



1948

Over de irrationaliteit van π .

(Voordracht van Prof. Dr J. Popken, 27 October 1948).

1. Het bekende delingsalgoritme voor veeltermen kan men als volgt uitbreiden tot machtreeksen: gaat men uit van de beide reeksen

$$R_0(x) = a_0^{(0)} + a_1^{(0)} x^{-2} + a_2^{(0)} x^{-4} + \dots + a_m^{(0)} x^{-2m} + \dots$$

$$R_1(x) = a_0^{(1)} x^{-1} + a_1^{(1)} x^{-3} + a_2^{(1)} x^{-5} + \dots + a_m^{(1)} x^{-2m-1} + \dots$$

en is $a_0^{(1)} \neq 0$, dan kan men een reeks

$$R_2(x) = a_0^{(2)} x^{-2} + a_1^{(2)} x^{-4} + \dots + a_m^{(2)} x^{-2m-2} + \dots$$

vinden, zodat

$$R_0(x) = \frac{a_0^{(0)}}{a_0^{(1)}} x \cdot R_1(x) + R_2(x).$$

Is ook $a_0^{(2)} \neq 0$, dan kan men dit procédé voortzetten met $R_1(x)$ en $R_2(x)$ en zo komt men tot een rij van reeksen

$$R_v(x) = a_0^{(v)} x^{-v} + a_1^{(v)} x^{-v-2} + \dots + a_m^{(v)} x^{-v-2m} + \dots$$

met

$$R_{v-2}(x) = \frac{a_0^{(v-2)}}{a_0^{(v-1)}} x R_{v-1}(x) + R_v(x) \quad (v = 2, 3, \dots, n),$$

indien althans $a_0^{(1)} \neq 0, a_0^{(2)} \neq 0, \dots, a_0^{(n-1)} \neq 0$.

Gemakkelijk leidt men de volgende recurrente betrekking af:

$$(1) \quad a_m^{(v)} = a_{m+1}^{(v-2)} - \frac{a_0^{(v-2)}}{a_0^{(v-1)}} a_{m+1}^{(v-1)} \quad (v = 2, 3, \dots, n; m = 0, 1, \dots).$$

Met behulp daarvan is het mogelijk om de coëfficiënten van $R_v(x)$ uit te drukken in die van $R_0(x)$ en $R_1(x)$ en wel door middel van determinanten. Speciaal voor $a_0^{(v)}$ vindt men een eenvoudige uitdrukking. Voert men n.l. de oneindige matrix

$$(2) \quad \begin{pmatrix} a_0^{(1)} & a_0^{(0)} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_1^{(1)} & a_1^{(0)} & a_0^{(1)} & a_0^{(0)} & 0 & 0 & \dots \\ a_2^{(1)} & a_2^{(0)} & a_1^{(1)} & a_1^{(0)} & a_0^{(1)} & a_0^{(0)} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

in en duidt men de determinant, gevormd uit het eerste v -tal rijen en het eerste v -tal kolommen, aan door D_v ($v = 1, 2, \dots, n$), dan is

$$(3) \quad D_v = a_0^{(1)} a_0^{(2)} \dots a_0^{(v)} .$$

2. We nemen nu speciaal

$$R_0(x) = \cos x^{-1} = 1 - \frac{x^{-2}}{2!} + \dots + (-1)^m \frac{x^{-2m}}{(2m)!} + \dots$$

$$R_1(x) = \sin x^{-1} = \frac{x^{-1}}{1!} - \frac{x^{-3}}{3!} + \dots + (-1)^m \frac{x^{-2m-1}}{(2m+1)!} + \dots$$

Passen we op deze beide reeksen het voorgaande algoritme toe, dan komt er

$$(4) \quad \begin{cases} \cos x^{-1} = x \cdot \sin x^{-1} + R_2(x) \\ \sin x^{-1} = -3x \cdot R_2(x) + R_3(x) \\ R_2(x) = 5 \cdot x \cdot R_3(x) + R_5(x) \\ \hline R_{n-2}(x) = \pm (2n-3)x R_{n-1}(x) + R_n(x) \\ \hline \end{cases}$$

met

$$(5) \quad R_n(x) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} 2^{n-1} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(m+n-1)!}{m!(2m+2n-1)!} x^{-2m-n},$$

zoals met behulp van de recurrente betrekking (1) gemakkelijk is te bewijzen.

Met behulp van dit resultaat kunnen we zeer eenvoudig aantonen, dat voor elk rationaal getal $y \neq 0$ de verhouding $\cos y : \sin y$ irrationaal is (Lambert).

We stellen daartoe $x = y^{-1}$, zodat ook x rationaal is; de noemer van dit getal zij a . Verder nemen we nu aan, dat $\cos y$ en $\sin y$ de geheel-tallige verhouding $p : q$ hebben, zodat

$$\cos x^{-1} = p\rho, \quad \sin x^{-1} = q\rho \quad (\rho > 0).$$

Uit de eerste regel van (4) blijkt dan, dat

$$R_2(x) = p\rho - x q\rho,$$

zodat $\frac{R_2(x)}{\rho}$ een breuk is met noemer a ; evenzo blijkt dan uit de tweede

regel, dat $\frac{R_3(x)}{\rho}$ een breuk is met noemer a^2 , enz. We vinden in het

algemeen, dat $\frac{R_n(x)}{\rho}$ een breuk is met noemer a^{n-1} ($n=2,3,\dots$) zodat

$$\frac{a^n R_n(x)}{\rho} \text{ geheel is.}$$

Uit (5) volgt echter

$$|R_n(x)| < \frac{A^n}{n!}$$

waar A een positief getal is, dat niet van n afhangt. Voor voldoende grote waarden van n is dus

$$\left| \frac{a^n R_n(x)}{\rho} \right| < 1, \text{ d.w.z. } R_n(x) = 0.$$

Is echter voor een bepaalde waarde van n zowel $R_n(x)$ als $R_{n+1}(x)$ nul, dan volgt uit het algorithm (4) succesievelijk $R_{n-1}(x) = 0$, $R_{n-2}(x) = 0$,, dus tenslotte

$$R_1(x) = \sin x^{-1} = 0, R_0(x) = \cos x^{-1} = 0,$$

wat een tegenspraak oplevert.

Wegens $\cos \pi = -1$, $\sin \pi = 0$ volgt dus, dat π niet rationaal kan zijn.

3. Kiest men $x = \frac{2}{\pi}$, dan is $\cos x^{-1} = 0$, $\sin x^{-1} = 1$ en men vindt in dit geval uit (4)

$$R_2(x) = \cos x^{-1} - x \sin x^{-1} = -x,$$

$$R_3(x) = \sin x^{-1} + 3 x R_2(x) = 1 - 3 x^2$$

$$R_6(x) = R_4(x) - 9 x R_5(x) = -15 x (1 - 28 x^2 + 63 x^4).$$

Aan de andere kant volgt uit (5)

$$|R_6(x)| < 2^5 \frac{5!}{0!1!1!1!} x^{-6},$$

We mogen dus verwachten, dat een wortel van $1 - 28 x^2 + 63 x^4 = 0$ dicht bij $\frac{2}{\pi}$ ligt. De vergelijking $x^4 - 28 x^2 + 63 = 0$ heeft als wortels $\pm \sqrt{14 \pm \sqrt{133}}$. Zo vinden we als benadering voor π

$$p = 2 \sqrt{14 - \sqrt{133}} = 3,14161..., \\ \text{terwijl } \pi = 3,14159....$$

Wegens

$$p = 2 \sqrt{14 - \sqrt{13^2 - 6^2}}$$

geeft dit aanleiding tot een benaderde kwadratuur van de cirkel.

4. Neemt men in § 1 aan, dat $a_0^{(v)} > 0$ en dat ook de determinanten $D_1, \dots, D_n$ positief zijn, dan blijkt uit de betrekking (3) $D_v = a_0^{(1)} a_0^{(2)} \dots a_0^{(v)}$, dat $a_0^{(1)}, a_0^{(2)}, \dots, a_0^{(v)}$ positief zijn, zodat in

dit geval

$$(6) \quad \begin{cases} R_0(x) = p_1 x R_1(x) + R_2(x) \\ \hline R_{n-1}(x) = p_n x R_n(x) + R_{n+1}(x), \end{cases}$$

waar nu $p_1, p_2, \dots, p_n$ positieve getallen voorstellen.

Dit stelt ons in staat om met onze methode een bekend resultaat van Hurwitz over de nulpunten van een veelterm

$$B(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n$$

af te leiden.

Met geringe wijziging kunnen we n.l. de voorgaande theorie toepassen op de beide veeltermen:

$$R_0(x) = b_0 x^n + b_2 x^{n-2} + b_4 x^{n-4} + \dots$$

$$R_1(x) = b_1 x^{n-1} + b_3 x^{n-3} + b_5 x^{n-5} + \dots$$

In dit geval worden de determinanten D_v ($v = 1, 2, \dots$) gevonden (vgl. (2)) uit de matrix:

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 & 0 & \dots \\ b_5 & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & \dots \\ \hline \end{pmatrix} \quad (b_v = 0 \text{ voor } v > n).$$

Stel, dat de voorwaarden

$$b_0 > 0, D_1 = b_1 > 0, D_2 = \begin{vmatrix} b_1 & b_0 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix} > 0, \dots, D_n > 0$$

vervuld zijn, dan zullen we bewijzen, dat elke wortel van $B(x) = 0$ een negatief reëel deel heeft.

Immers gelden de relaties (6), waarbij $p_1, p_2, \dots, p_n$ positieve getallen zijn en $R_v(x)$ ($v = 2, 3, \dots, n$) een veelterm is van de vorm

$$R_v(x) = a_0^{(v)} x^{n-v} + a_1^{(v)} x^{n-v-2} + \dots,$$

terwijl $R_{n+1}(x)$ identiek nul is.

We beschouwen nu een willekeurige wortel z van $B(x) = 0$, dan is $R_0(z) + R_1(z) = 0$. Uit $R_1(z) = 0$ zou volgen $R_0(z) = 0$ en dus volgens (6) successievelijk $R_2(z) = 0, R_3(z) = 0, \dots, R_n(z) = 0$. Echter is $R_n(z) = a_0^{(n)} > 0$. Dus $R_1(z) \neq 0$.

Uit (6) volgt nu voor een zeker natuurlijk getal $m \leq n$

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} -1 = \frac{R_0(z)}{R_1(z)} = p_1 z + \frac{R_2(z)}{R_1(z)} \\ \frac{R_1(z)}{R_2(z)} = p_2 z + \frac{R_3(z)}{R_2(z)} \\ \dots\dots\dots \\ \frac{R_{m-2}(z)}{R_{m-1}(z)} = p_{m-1} z + \frac{R_m(z)}{R_{m-1}(z)} \\ \frac{R_{m-1}(z)}{R_m(z)} = p_m z \end{array} \right.$$

Is $p > 0$ en heeft een getal α een reëel deel $\gg 0$, dan heeft ook $p\alpha$ deze eigenschap, en, als $\alpha \neq 0$, geldt hetzelfde voor $\frac{1}{\alpha}$.

Passen wij deze eigenschappen herhaald toe, dan volgt uit (7), dat z geen reëel deel $\gg 0$ bezitten kan, waarmee de bewering aangetoond is.

Er werd nog op gewezen, dat deze stelling in de theorie der stabiliteit een grote rol speelt.